Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 13

Twierdzenie Banacha o operatorze otwartym

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Def. $f : X \to Y$ **otwarte** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \underset{U \subseteq X \text{ otwarty}}{\forall} f(U)$ otwarty w Y

Uw. Odwracalne odwzorowanie $f : X \to Y$ jest otwarte $\Longleftrightarrow$ odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe.

Ciągła bijekcja $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem $\Longleftrightarrow$ jest odwzorowaniem otwartym.

Niech $K_X := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ oznacza kulę jednostkową w przestrzeni unormowanej X. Kulę o środku w $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ będziemy zapisywać $x_0 + rK_X = \{x_0 + ry : y \in K_x\}$.

Lem. Rozważmy $T : X \to Y$ operator liniowy oraz otwarte kule jednostkowe K_X i K_Y w przestrzeniach unormowanych X i Y.

$$T \text{ jest odwzorowaniem otwartym} \iff \underset{r>0}{\exists}\ rK_Y \subseteq T(K_X).$$

Ponadto, jeśli operator T jest otwarty, to jest surjekcją.

$$T \text{ jest otwarty} \iff \underset{r>0}{\exists}\ rK_Y \subseteq T(K_X).$$

Dowód:

"$\Longrightarrow$" Jeśli T otwarte, to $T(K_X)$ jest zbiorem otwartym. Skoro $0 \in T(K_X)$, to istnieje $r > 0$ takie, że $rK_Y \subseteq T(K_X)$. Ponadto

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nrK_Y \overset{\text{wybór } r}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(K_X) \overset{\text{wł. obrazu}}{=} T(\bigcup_{n=1}^{\infty} nK_X) = T(X).$$

Czyli $T(X) = Y$.

"$\Longleftarrow$" Załóżmy, że $rK_Y \subseteq T(K_X)$ dla pewnego $r > 0$. Weźmy zbiór otwarty $U \subseteq X$. Niech $y \in T(U)$ i niech $x \in U$ taki, że $Tx = y$. Skoro U otwarty, to istnieje $\delta > 0$ taka, że $x + \delta K_X \subseteq U$. Zauważmy, że

$$y + \delta rK_Y \subseteq y + \delta T(K_X) = Tx + \delta T(K_X) = T(x + \delta K_X) \subseteq T(U).$$

Czyli $T(U)$ wraz z każdym punktem zawiera jego otoczenie. Zatem $T(U)$ jest zbiorem otwartym. $\blacksquare$

Twierdzenie Banacha o operatorze otwartym

Niech $T \in B(X, Y)$, gdzie X i Y przestrzenie Banacha.

$$T \text{ jest surjekcją} \iff T \text{ jest odwzorowaniem otwartym.}$$

Dowód: "$\Longleftarrow$" wynika z **Lem**.
"$\Longrightarrow$" Załóżmy, że T jest surjekcją. Wtedy

$$Y = T(X) = T\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} nK_X\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nK_X).$$

Z **Tw. Baire**'a (bo Y prz. zupełna) istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\operatorname{Int}(\overline{T(nK_X)}) \neq \emptyset.$$

Czyli istnieje $y_0 \in Y$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $y_0 + \varepsilon K_Y \subseteq \overline{T(nK_X)}$.
Skoro $T(X) = Y$, to istnieje $x_0 \in X$ taki, że $Tx_0 = y_0$. Stąd

$$\varepsilon K_Y \subseteq \overline{T(nK_X)} - y_0 = \overline{T(nK_X)} - T(x_0) = \overline{T(nK_X - x_0)}$$
$$\subseteq \overline{T((n + \|x_0\|)K_X)} = (n + \|x_0\|)\overline{T(K_X)}.$$

Dzieląc przez $n + \|x_0\|$ i kładąc $r := \frac{\varepsilon}{n+\|x_0\|}$ otrzymujemy

$$rK_Y \subseteq \overline{T(K_X)}. \tag{1}$$

Z dokładnością do domknięcia jest to warunek z **Lem**. W celu "pozbycia się domknięcia" pokażemy, że

$$\overline{T(K_X)} \subseteq T(2K_X). \tag{2}$$

Niech $y \in \overline{T(K_X)}$. Istnieje $x_1 \in K_X$ taki, że $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{2}$. Stąd

$$y - Tx_1 \in \tfrac{r}{2}K_Y \overset{(1)}{\subseteq} \tfrac{1}{2}\overline{T(K_X)} = \overline{T\left(\tfrac{1}{2}K_X\right)}.$$

Stosując to samo rozumowanie do $y - Tx_1 \in \overline{T\left(\frac{1}{2}K_X\right)}$ możemy znaleźć $x_2 \in \frac{1}{2}K_X$ taki, że $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{r}{4}$ i stąd

$$y - T(x_1 + x_2) = (y - Tx_1) - Tx_2 \in \tfrac{r}{4}K_Y \subseteq \overline{T\left(\tfrac{1}{4}K_X\right)}.$$

Kontynuując w ten sposób otrzymujemy ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ taki, że

$$x_n \in \frac{1}{2^{n-1}}K_X \quad \text{oraz} \quad y - T(x_1 + \ldots + x_n) \in \frac{r}{2^n}K_Y.$$

Z tej drugiej relacji wynika, że $T(x_1 + \ldots + x_n) \to y$ w Y.

Natomiast pierwsza relacja (oraz zupełność X) gwarantuje, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny w X, bo jest zbieżny bezwględnie:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

W szczególności, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in 2K_X$. Wykorzystując ciągłość (ograniczoność) operatora T otrzymujemy

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_1 + \ldots + x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_1+\ldots+x_n) = y,$$

Czyli $y \in T(2K_X)$. To kończy dowód inkluzji (2).

W świetle inkluzji (1) daje to $rK_Y \subseteq T(2K_X)$ lub równoważnie $\frac{r}{2}K_Y \subseteq T(K_X)$. Zatem T jest odwzorowaniem otwartym na mocy **Lem**. ■

Wn1. $\left(\begin{array}{l} T \in B(X,Y) \text{ oraz } T \text{ bijekcja} \\ X, Y \text{ przestrzenie Banacha} \end{array}\right) \implies T^{-1} \in B(Y,X)$

Dowód: Skoro T jest surjekcją, to na mocy Twierdzenia Banacha jest odwozorowaniem otwartym. Czyli dla każdego otwartego zbioru U w X zbiór $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ jest otwarty w Y. Zatem operator T^{-1} jest ciągły, czyli ograniczony. ∎

Wn2. Każde dwie porównywalne normy zupełne na przestrzeni liniowej X są równoważne.

Dowód: Norma $\|\cdot\|_1$ jest słabsza, niż $\|\cdot\|_2$ jeżeli $\exists_{c_1>0}\ \forall_{x\in X}\ \|x\|_1 \leqslant c_1\|x\|_2$, czyli gdy operator identycznościowy $id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ jest ograniczony. Skoro id bijekcja, to na mocy Wn1 operator odwrotny $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ jest ograniczony. Czyli $\exists_{c_2>0}\ \forall_{x\in X}\ \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1$, co oznacza, że norma $\|\cdot\|_2$ jest słabsza, niż $\|\cdot\|_1$. Zatem normy są równoważne. ∎

Def. **Wykresem funkcji** $f : X \to Y$ nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

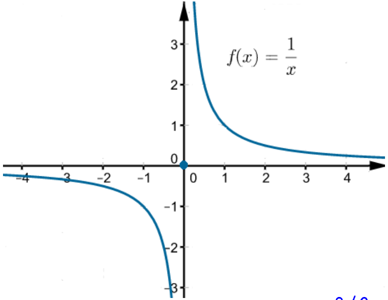
Lem. Wykres funkcji ciągłej jest domknięty:

$$\left(\begin{array}{l} f : X \to Y \text{ funkcja ciągła} \\ X, Y \text{ przestrzenie metryczne} \end{array} \right) \implies \Gamma(f) \text{ domknięty w } X \times Y.$$

Dowód: Jeśli $(x_0, y_0) \in \overline{\Gamma(f)}$, to istnieje ciąg $(x_n, y_n) \in \Gamma(f)$ taki, że $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Z ciągłości funkcji

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

Czyli $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$. ■



Prz. Implikacja odwrotna w Lemacie nie zachodzi. Np. $X = Y = \mathbb{R}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tw. (o wykresie domkniętym)

Operator liniowy $T : X \to Y$, gdzie X i Y przestrzenie Banacha, jest ciągły (ograniczony) $\iff$ T ma domknięty wykres.

Dowód: Potrzebujemy pokazać tylko '$\Longleftarrow$'. Zauważmy, że

1) $X \times Y$ przestrzeń Banacha z $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$
2) $\Gamma(T)$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową w $X \times Y$.

Zatem $\Gamma(T)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_{X\times Y}$. Rzuty

$$P_1 : \Gamma(T) \to X, \quad \text{gdzie} \quad P_1(x, Tx) = x,$$

$$P_2 : \Gamma(T) \to Y, \quad \text{gdzie} \quad P_2(x, Tx) = Tx,$$

są liniowe oraz ograniczone ($\|P_1\| \leqslant 1$, $\|P_2\| \leqslant 1$). Zauważmy, że operator P_1 jest odwracalny. Zatem operator odwrotny

$$P_1^{-1} : X \to \Gamma(T), \quad \text{gdzie} \quad P_1^{-1}(x) = (x, Tx)$$

jest ograniczonym na mocy **Wn1**. Stąd operator

$$T = P_2 \circ P_1^{-1}$$

jest ograniczony jako złożenie operatorów ograniczonych. ∎